



ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

POLIEDROS REGULARES

**CICLO
PRE
UNIVERSITARIO
2024-1**



POLIEDROS REGULARES

INTRODUCCIÓN:

Platón, en su obra *Timaeus*, asoció cada uno de los cuatro elementos que según los griegos formaban el Universo, fuego, aire, agua y tierra a un poliedro: **fuego** al tetraedro, **aire** al octaedro, **agua** al icosaedro y **tierra** al cubo.

Finalmente asoció el último poliedro regular, el dodecaedro, al **universo**. Por ese motivo estos poliedros reciben el nombre de *sólidos platónicos*.

También fue Johannes Kepler, el que buscó ingeniosas justificaciones a la asociación de Platón entre poliedros y elementos. Por ejemplo, justifica la asociación de la tierra con el cubo porque, asentado sobre una cualquiera de sus caras como base, es el de mayor estabilidad. La asociación entre el Universo y Dodecaedro la atribuye al hecho de que el número de sus caras coincide con el de los signos del zodiaco.

...

POLIEDROS REGULARES

...

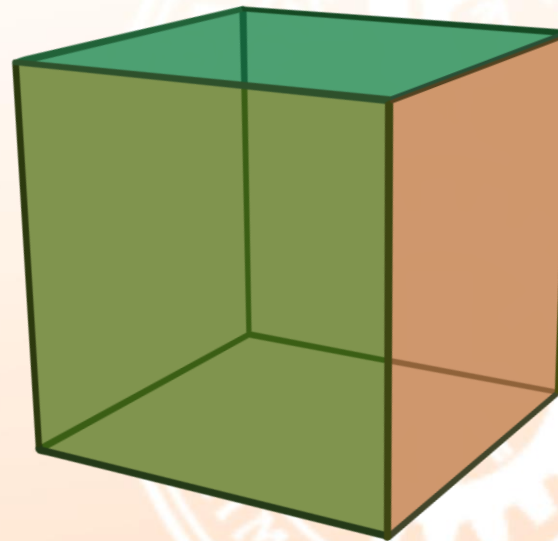
En 1595, Kepler convencido de “haber comprendido los secretos del creador”, creó un modelo del sistema planetario que utilizaba los sólidos platónicos para describir las distancias entre las órbitas de los seis planetas que se conocían entonces.

En su modelo, Kepler parte de una esfera exterior, que representa la órbita de Saturno dentro de la cual va inscribiendo sucesivamente: un cubo, la esfera de Júpiter, un tetraedro, la esfera de Marte, un dodecaedro, la esfera de la Tierra, un octaedro y finalmente la esfera de Mercurio a un icosaedro.

POLIEDRO REGULAR

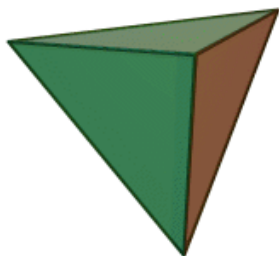
Definición

Un poliedro convexo, es regular, si las caras son regiones poligonales regulares congruentes entre sí y todos sus ángulos poliedros son congruentes.

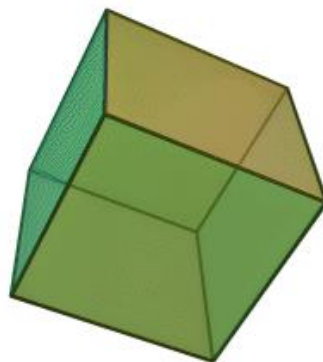
ce
pre
UNI

TEOREMA

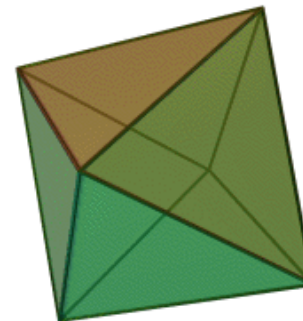
Solo existen cinco clases de poliedros regulares.
Estos poliedros regulares son:



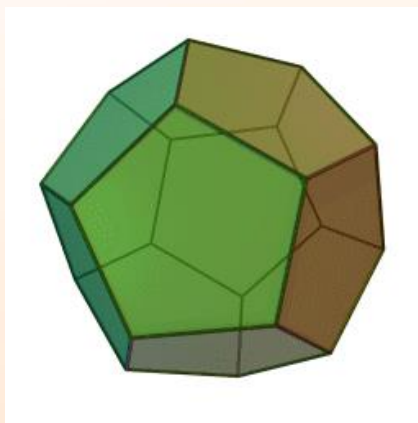
Tetraedro regular



Hexaedro regular



Octaedro regular



Dodecaedro regular



Icosaedro regular

Demostración:

Sean:

m: número de aristas que concurren en un vértice del poliedro regular ($3 \leq m$).

n: número de lados de cada cara en el poliedro regular ($3 \leq n$).

α : medida de cada ángulo interno de una cara del poliedro regular.

$$\Rightarrow \alpha = \frac{180(n-2)}{n}$$

Teorema en ángulos poliedros convexos: $m \left[\frac{180(n-2)}{n} \right] < 360$

$$m n - 2(m+n) < 0$$

$$\Rightarrow (m-2)(n-2) < 4$$

$$\Rightarrow (m - 2)(n - 2) < 4$$

Si $m = 3 \Rightarrow n < 6$, luego $n = 3$ (tetraedro regular) o
 $n = 4$ (hexaedro regular) o
 $n = 5$ (dodecaedro regular)

Si $m = 4 \Rightarrow n < 4$, luego $n = 3$ (octaedro regular)

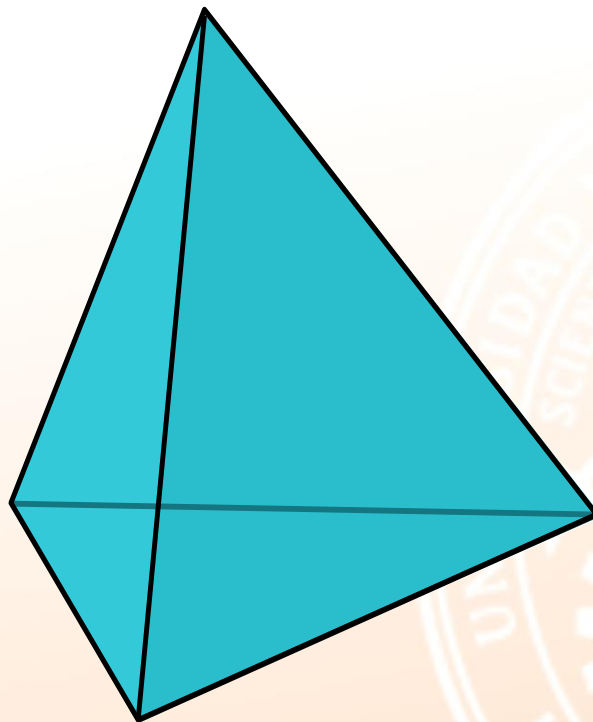
Si $m = 5 \Rightarrow n < \frac{10}{3}$, luego $n = 3$ (icosaedro regular)

Si $m = 6 \Rightarrow n < 3$ (no cumple condición)

Por lo tanto, solo existen cinco clases poliedros regulares

TETRAEDRO REGULAR

Definición.- Es el poliedro convexo determinado por cuatro regiones triangulares regulares.



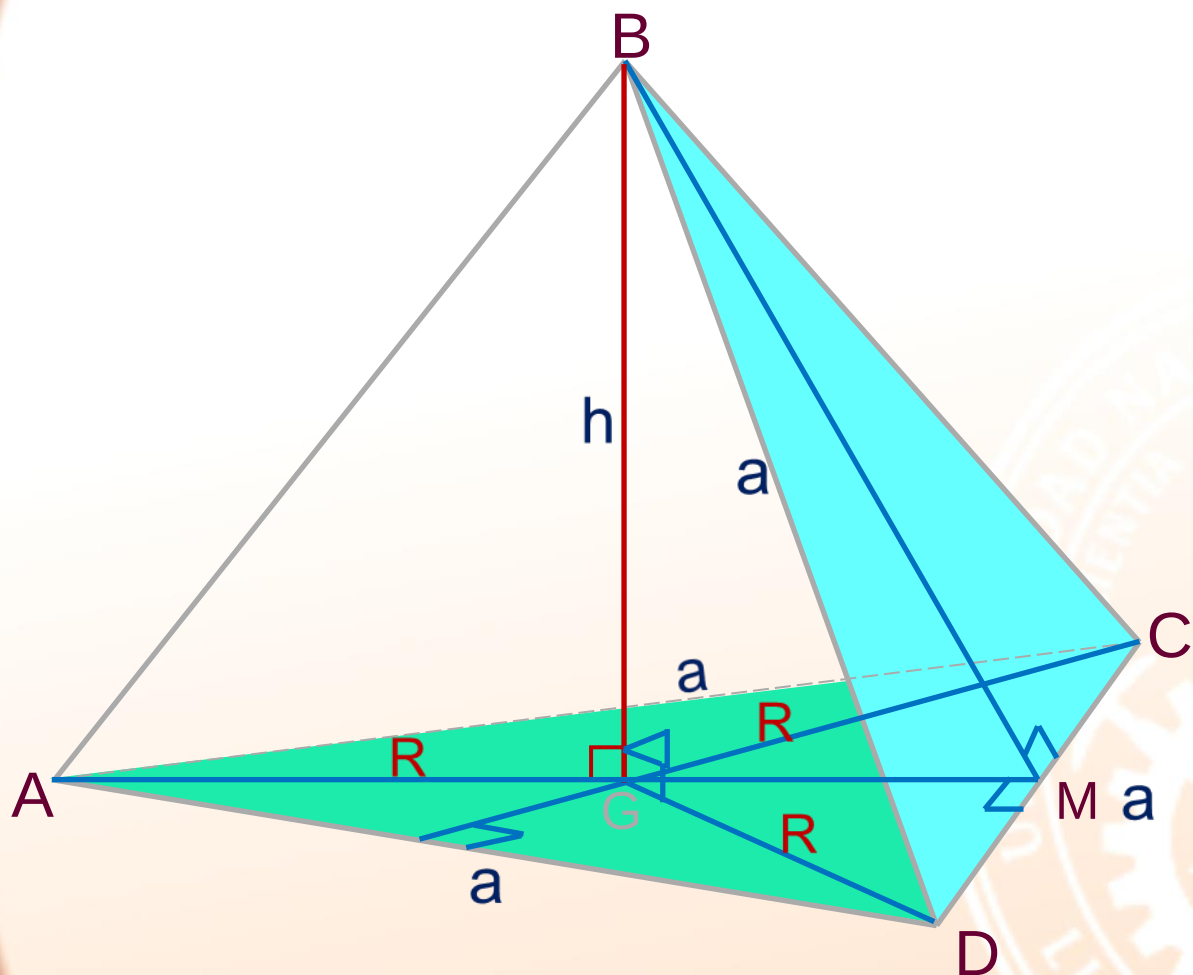
$C = 4$ caras

$V = 4$ vértices

$A = 6$ aristas

ce
pre
UNI

LONGITUD DE LA ALTURA DE UN TETRAEDRO REGULAR



En el tetraedro regular:

$$\triangle BGA \cong \triangle BGC \cong \triangle BGD$$

$$GA = GC = GD$$

G es baricentro, incentro,
ortocentro y **circuncentro** del $\triangle ACD$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$\triangle BGA$, teorema de Pitágoras:

$$h^2 + R^2 = a^2$$

$$h^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 = a^2 \Rightarrow h = \frac{a}{3} \sqrt{6}$$

PROBLEMA 1

En un tetraedro regular ABCD, G es el baricentro de la cara BCD. Si la arista mide ℓ , entonces la longitud de la proyección de $\overline{AG}$ sobre el plano ABC es

A) $\frac{2\sqrt{3}}{9}\ell$

B) $\frac{5\sqrt{3}}{8}\ell$

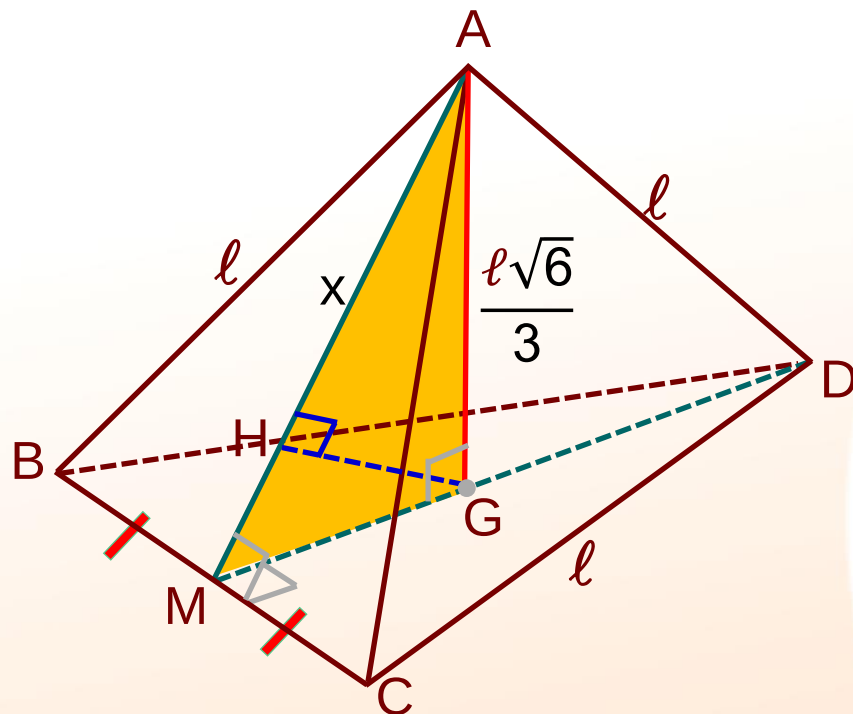
C) $\frac{4\sqrt{3}}{9}\ell$

D) $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$

E) $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$

RESOLUCIÓN 01

En un tetraedro regular ABCD, G es el baricentro de la cara BCD. Si la arista mide ℓ , entonces la longitud de la proyección de $\overline{AG}$ sobre el plano ABC es



$$AG = \frac{\ell\sqrt{6}}{3}, \quad AM = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$

$AH = x$ (Proy. de $\overline{AG}$ sobre $\overline{AM}$)

En el $\triangle AGM$, Relaciones métricas:

$$AG^2 = (AM)(AH) \quad \rightarrow \quad \left(\frac{\ell\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot x$$

$$\rightarrow x = \frac{6\ell^2 \cdot 2}{9\ell\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{4\sqrt{3}}{9} \ell$$

Clave: C

PROBLEMA 2

En un tetraedro regular ABCD, la distancia del centro de la cara ABC a $\overline{CD}$ es $2\sqrt{2}$ cm . Calcule el área total (en cm^2) del tetraedro.

A) $30\sqrt{3}$

B) $36\sqrt{3}$

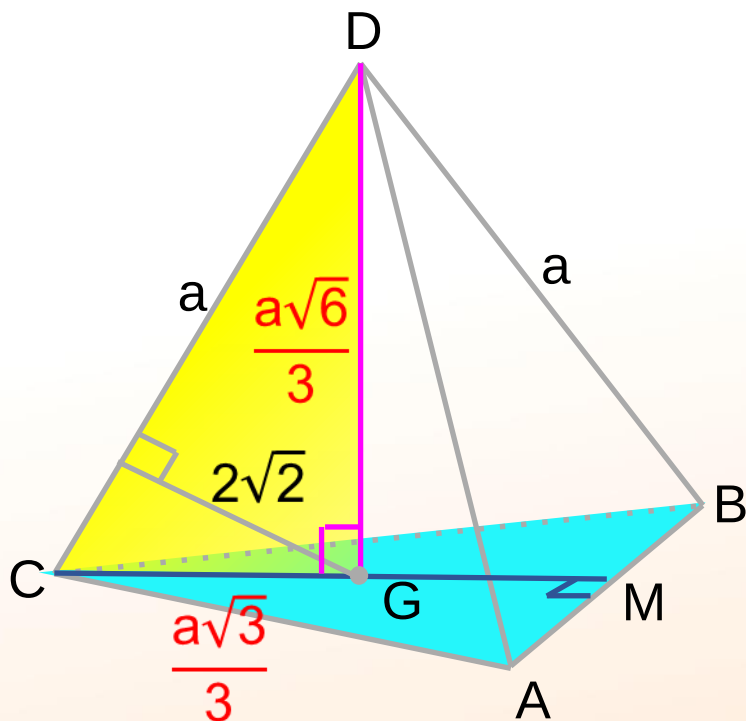
C) $40\sqrt{2}$

D) $45\sqrt{3}$

E) $50\sqrt{2}$

RESOLUCIÓN 2

En un tetraedro regular ABCD, la distancia del centro de la cara ABC a $\overline{CD}$ es $2\sqrt{2}$ cm . Calcule el área total (en cm^2) del tetraedro.



G es baricentro del Δ ACB

Calcule el Área(D-ABC)

D-ABC, teorema: $DG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Δ ABC, teorema: $GC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Δ DGC, relaciones métricas:

$$\frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{2} \cdot a \Rightarrow a = 6$$

$$\text{Área(D-ABC)} = a^2\sqrt{3} = 36\sqrt{3}$$

Clave: B

PROBLEMA 3

En un tetraedro regular, el poliedro que tiene por vértices los puntos medios de las aristas del tetraedro dado tiene ...

A) 12 aristas

B) 14 aristas

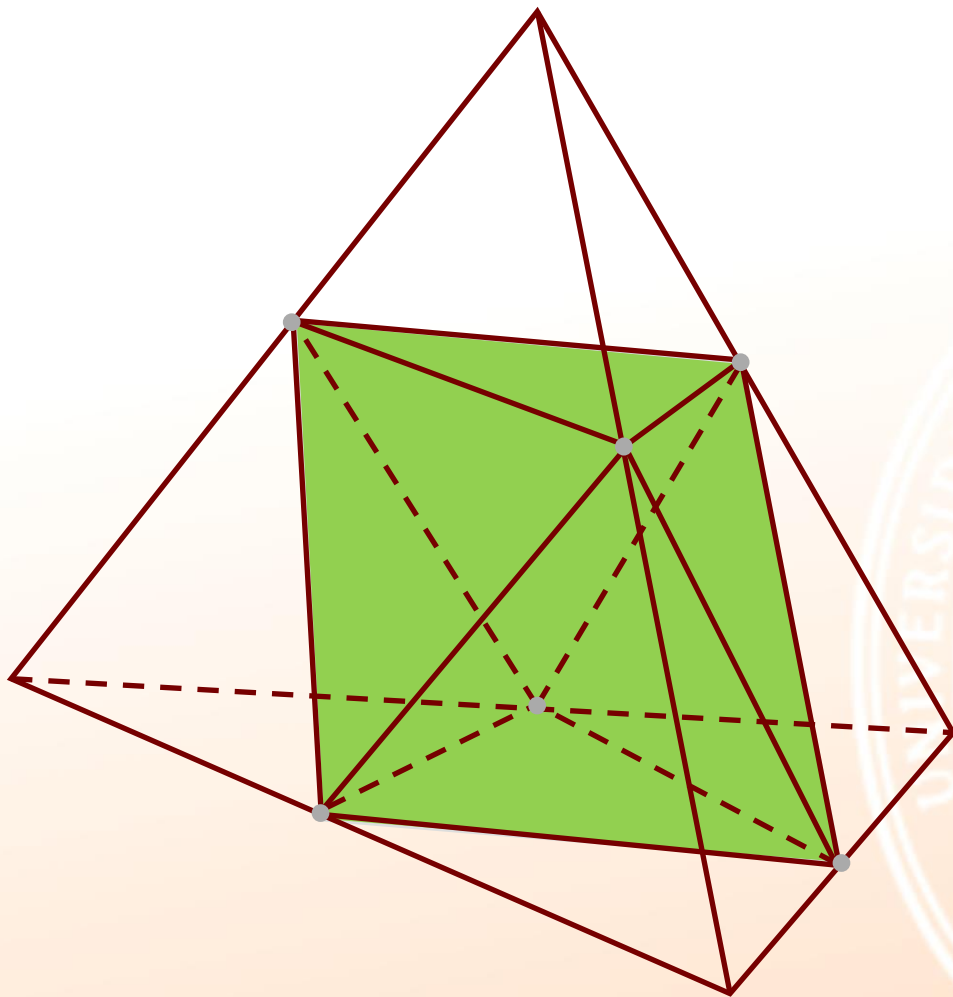
C) 16 aristas

D) 18 aristas

E) 20 aristas

RESOLUCIÓN 3

En un tetraedro regular, el poliedro que tiene por vértices los puntos medios de las aristas del tetraedro dado tiene ...

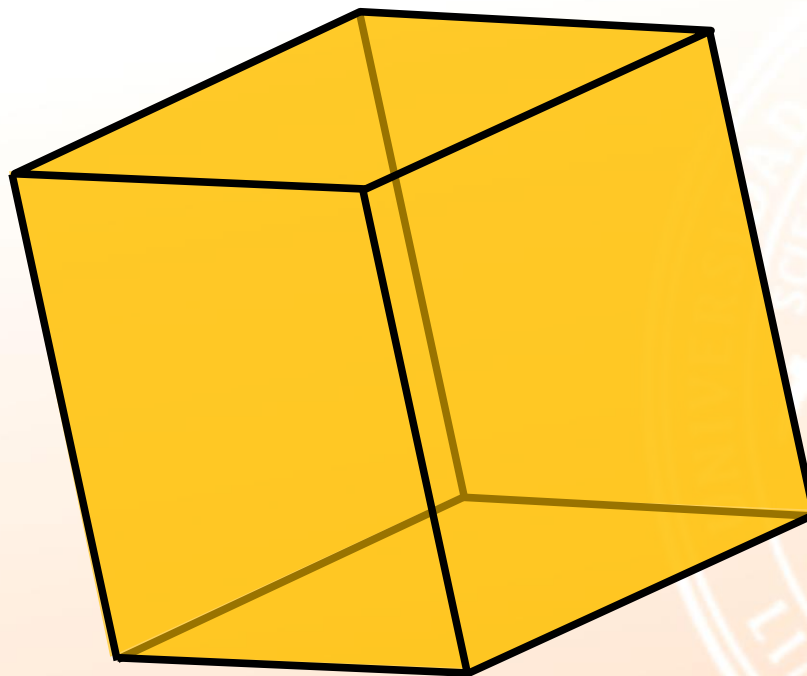


Al unir los puntos medios de las aristas del tetraedro, se forma un octaedro cuyo número de aristas es 12.

Clave: A

HEXAEDRO REGULAR

Definición.- Es el poliedro convexo determinado por seis regiones cuadradas.

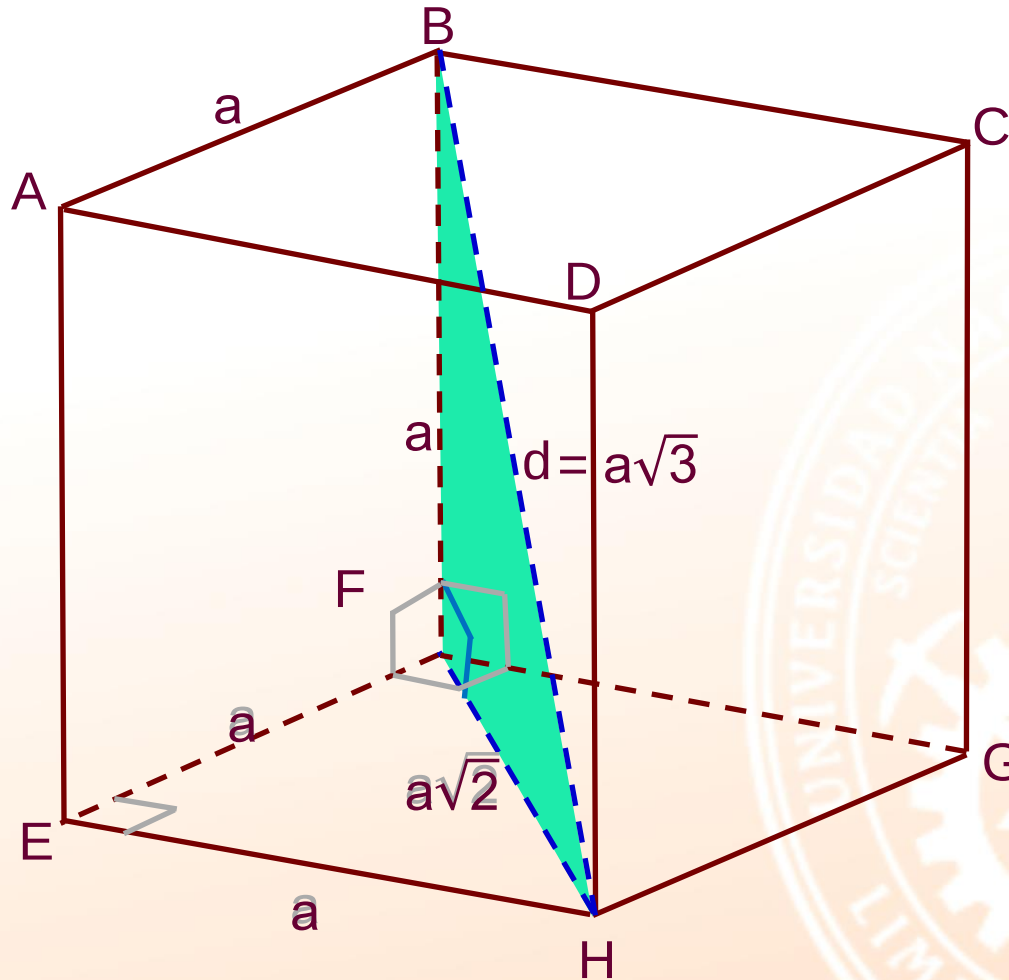


$C = 6$ caras

$V = 8$ vértices

$A = 12$ aristas

LONGITUD DE LA DIAGONAL DE UN HEXAEDRO REGULAR



Hexaedro regular: ABCD - EFGH

$\overline{BH}$: Diagonal $BH = d$

Se traza $\overline{FH}$

$\triangle FEH$: Notable de 45

$$FH = a\sqrt{2}$$

$\triangle BFH$: Pitágoras

$$d = a\sqrt{3}$$

PROBLEMA 04

En un hexaedro regular ABCD-EFGH, la arista mide ℓ . Calcule la longitud de la proyección ortogonal de $\overline{EG}$ sobre $\overline{EC}$.

A) $\frac{\ell\sqrt{2}}{2}$

B) $\frac{\ell}{3}$

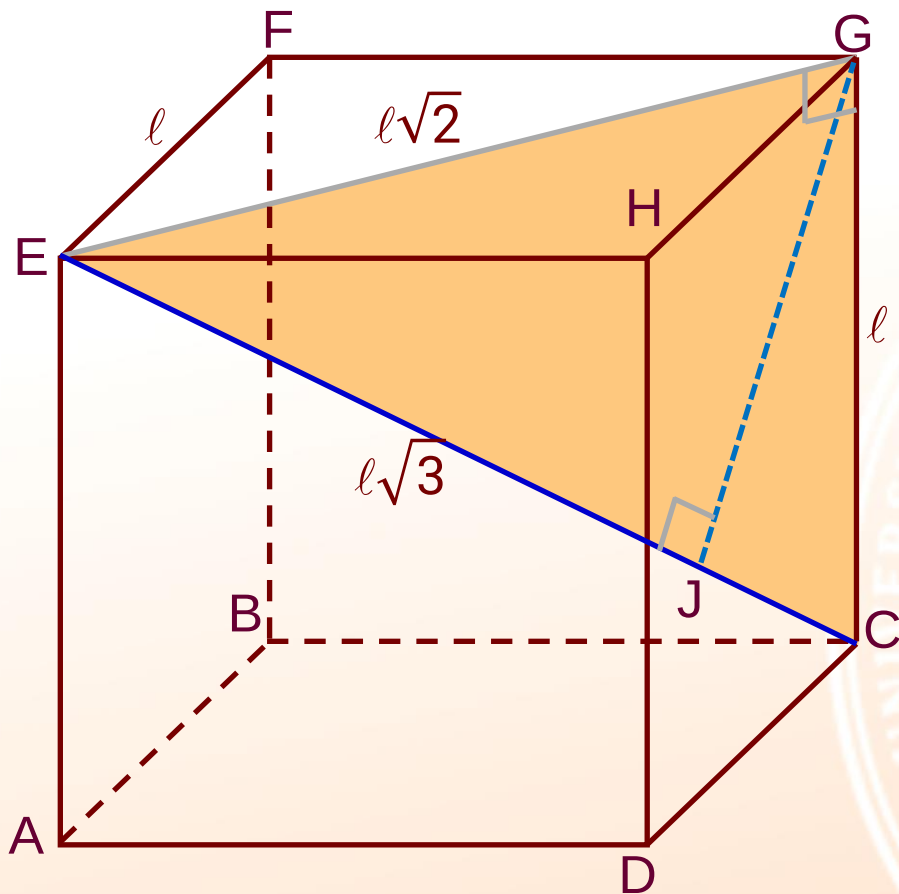
C) $\frac{\ell}{2}$

D) $\frac{2\ell\sqrt{3}}{3}$

E) $\frac{\ell\sqrt{3}}{3}$

RESOLUCIÓN 04

En un hexaedro regular ABCD-EFGH, la arista mide ℓ . Calcule la longitud de la proyección ortogonal de $\overline{EG}$ sobre $\overline{EC}$.



$\overline{EJ}$ es la proyección de $\overline{EG}$ sobre $\overline{EC}$.

En $\triangle EGC$:

$$EG^2 = EC \cdot EJ$$

$$(\sqrt{2}\ell)^2 = \ell\sqrt{3} \cdot EJ$$

$$2\ell^2 = \ell\sqrt{3} \cdot EJ$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}\ell = EJ$$

Clave: D

PROBLEMA 05

En un hexaedro regular $ABCD - EFGH$, los puntos N y M son puntos medios de $\overline{DC}$ y $\overline{FG}$, respectivamente. Si O es el centro de la cara $EFGH$, entonces la medida del ángulo que determinan las rectas AO y MN es

A) $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

B) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$

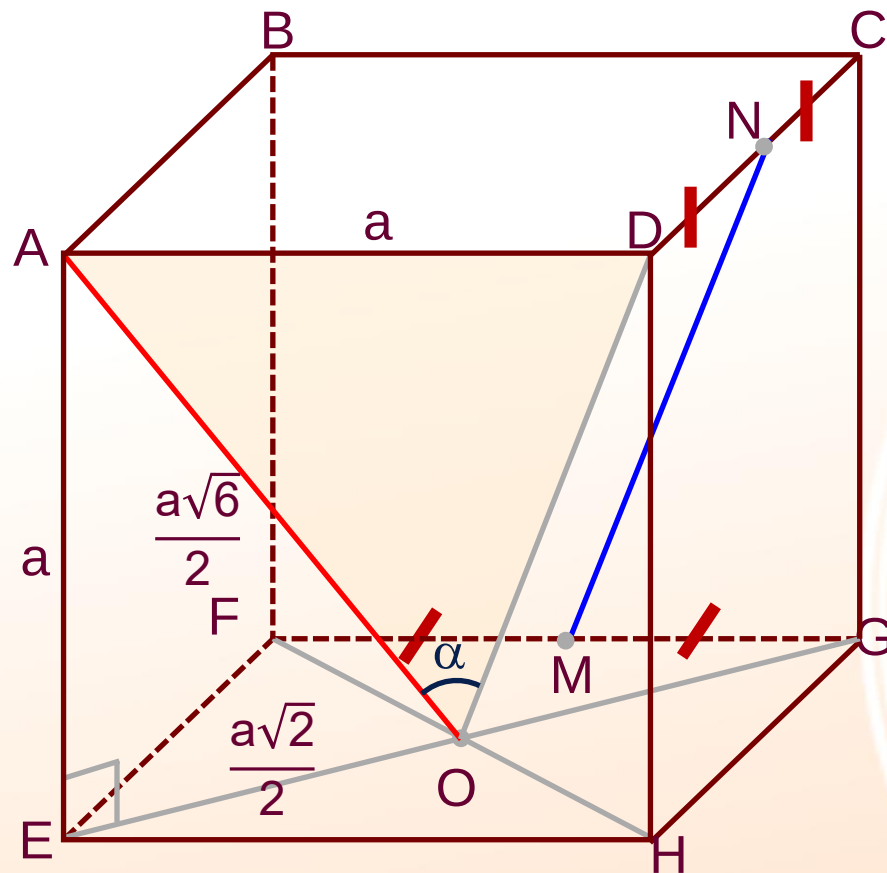
C) $\arccos\left(\frac{4}{5}\right)$

D) $\arccos\left(\frac{5}{8}\right)$

E) $\arccos\left(\frac{3}{5}\right)$

RESOLUCIÓN 05

En un hexaedro regular ABCD – EFGH, los puntos N y M son puntos medios de $\overline{DC}$ y $\overline{FG}$, respectivamente. Si O es el centro de la cara EFGH, entonces la medida del ángulo que determinan las rectas AO y MN es



Se traza por O: $\overline{DO} \parallel \overline{MN}$.

Sea a la longitud de la arista del hexaedro regular

$$\triangle AOD: \quad AO = OD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{6}}{2}\right)\cos \alpha$$

$$a^2 = \frac{6a^2}{4} + \frac{6a^2}{4} - \frac{6a^2}{2}\cos \alpha$$

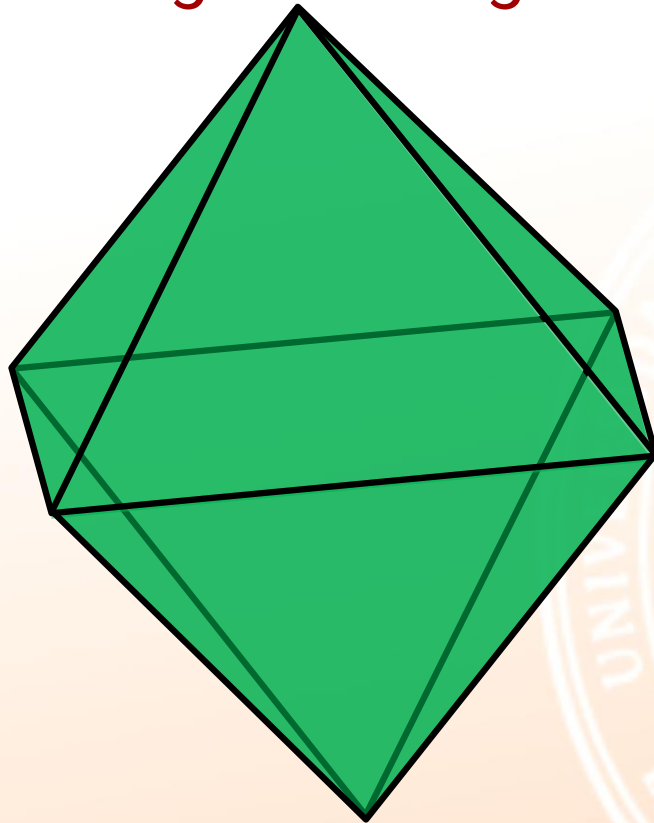
$$3 \cos \alpha = 2 \quad \Rightarrow \quad \cos \alpha = \frac{2}{3}$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{2}{3}\right)$$

Clave: B

OCTAEDRO REGULAR

Definición.- Es el poliedro convexo, determinado por ocho regiones triangulares regulares.



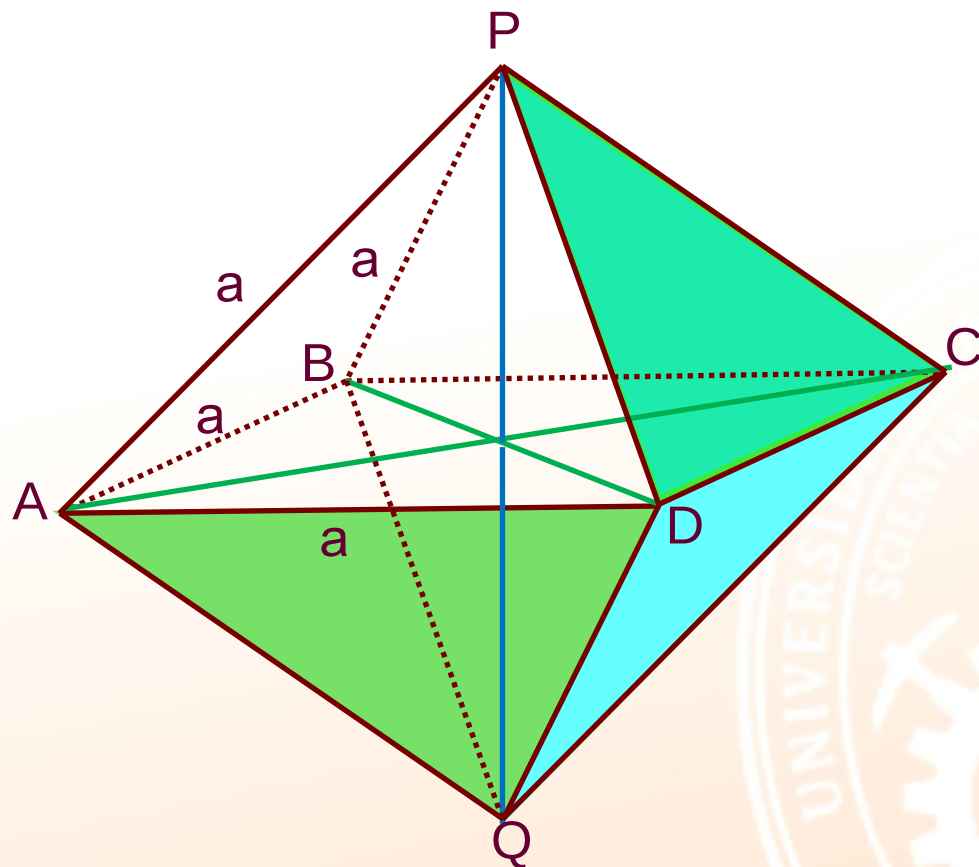
$C = 8$ caras

$V = 6$ vértices

$A = 12$ aristas

ce
pre
UNI

DIBUJANDO EL OCTAEDRO



ABCD, APCQ, BPDQ

son cuadrados

si: $AB = a$

entonces

$$AC = BD = PQ = a\sqrt{2}$$

ce
pre
UNI

PROBLEMA 06

En un octaedro regular la distancia de un vértice al centro de la cara opuesta mide ℓ . Calcule el área de la superficie total del octaedro regular.

A) $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{2}$

B) $\frac{\ell^2\sqrt{3}}{3}$

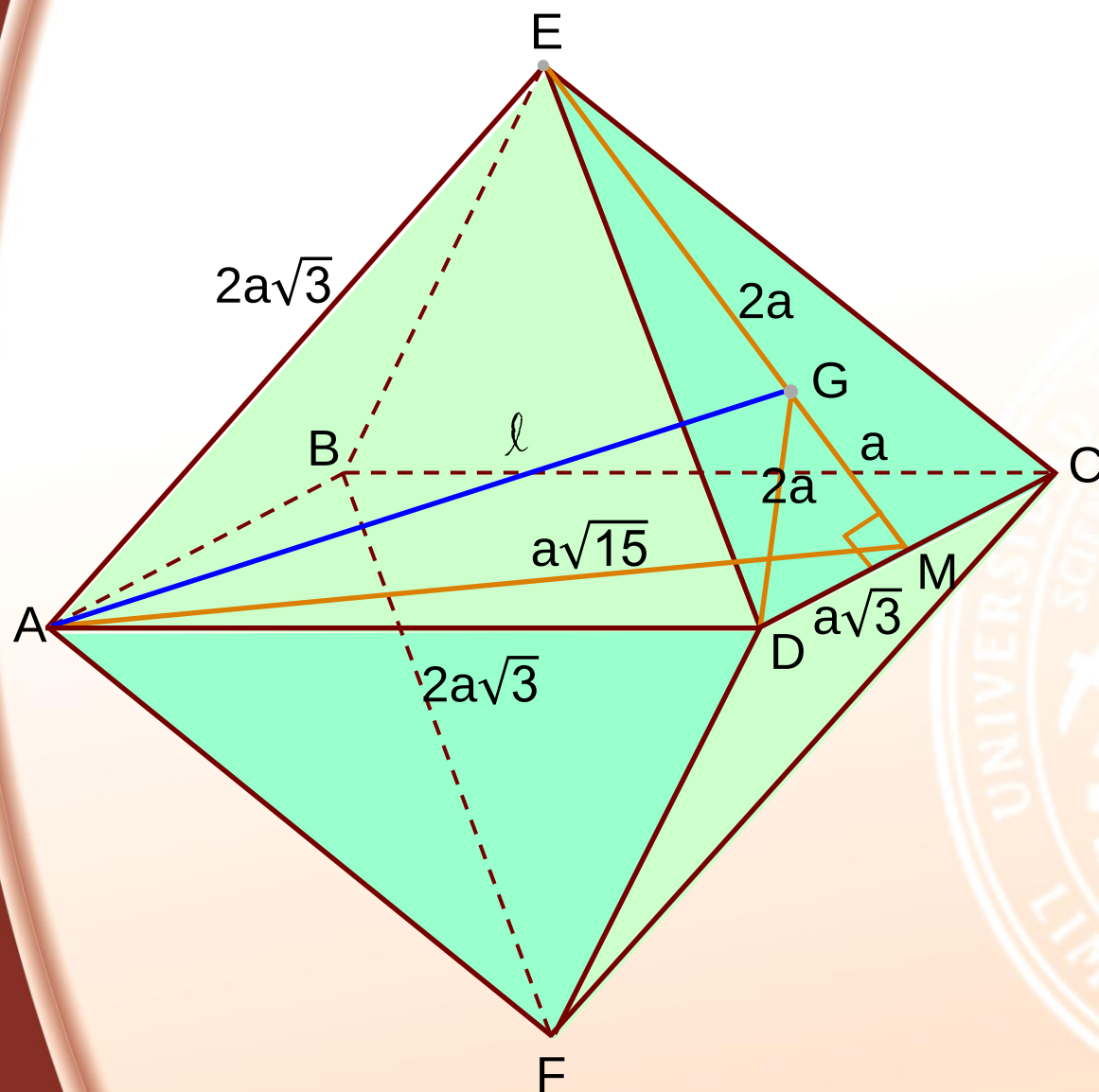
C) $2\ell^2\sqrt{3}$

D) $\ell^2\sqrt{3}$

E) $4\ell^2\sqrt{3}$

RESOLUCIÓN 06

En un octaedro regular la distancia de un vértice al centro de la cara opuesta mide ℓ . Calcule el área de la superficie total del octaedro regular



G es baricentro de la cara CDE

Calcule el Área(E-ABCD-F)

$\triangle ADM$, teorema de Pitágoras:

$$(AM)^2 = (AD)^2 + (MD)^2$$

$$AM = a\sqrt{15}$$

$\triangle AEM$, teorema de Stewart:

$$(AE)^2(a) + (AM)^2(2a) = (AG)^2(3a) + (a)(2a)(3a)$$

$$AG = 2a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow AG = AE$$

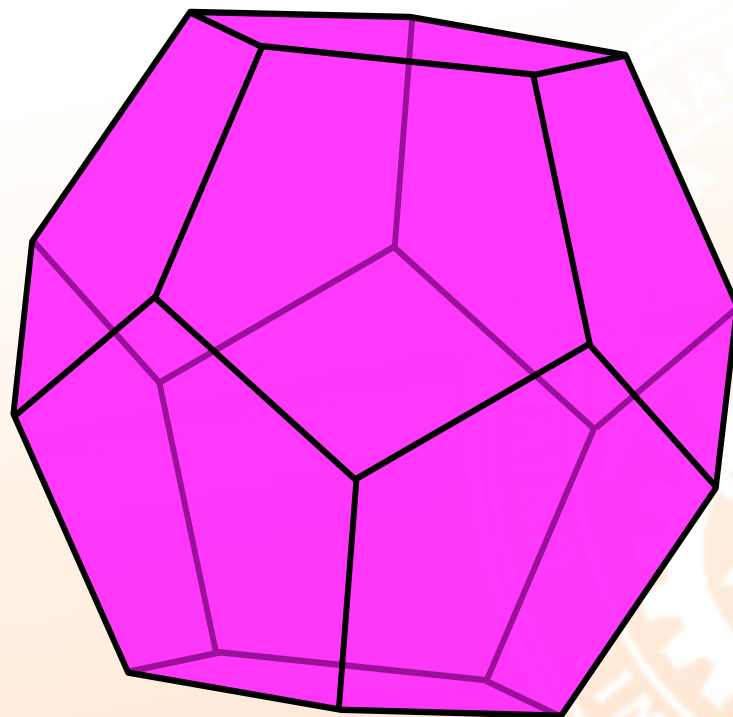
$$\text{Dato: } AG = \ell \Rightarrow AE = \ell$$

$$\text{Área(E-ABCD-F)} = 2\ell^2 \sqrt{3}$$

Clave: C

DODECAEDRO REGULAR

Definición.- Es el poliedro convexo determinado por doce regiones pentagonales regulares, veinte vértices y treinta aristas.



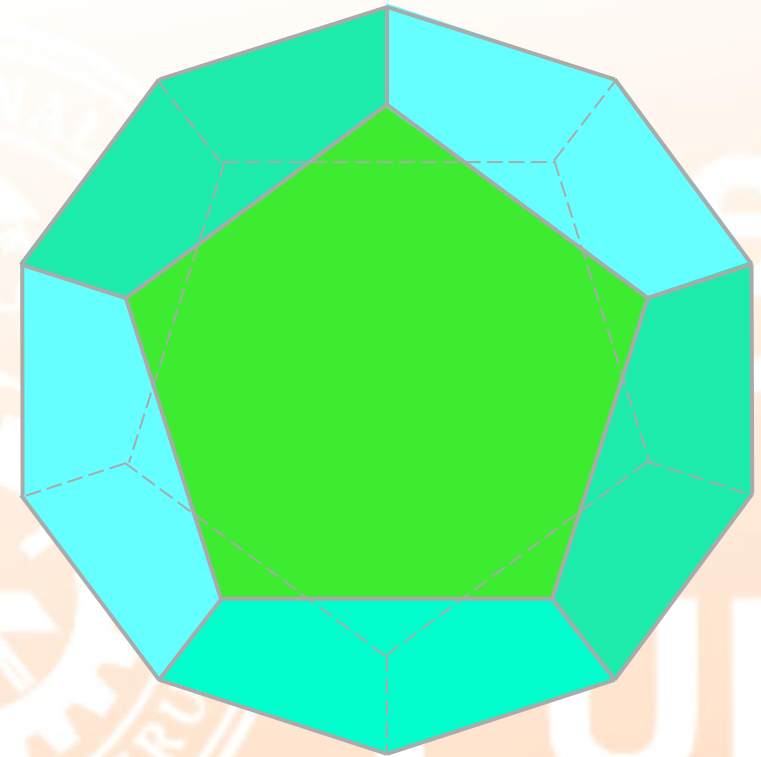
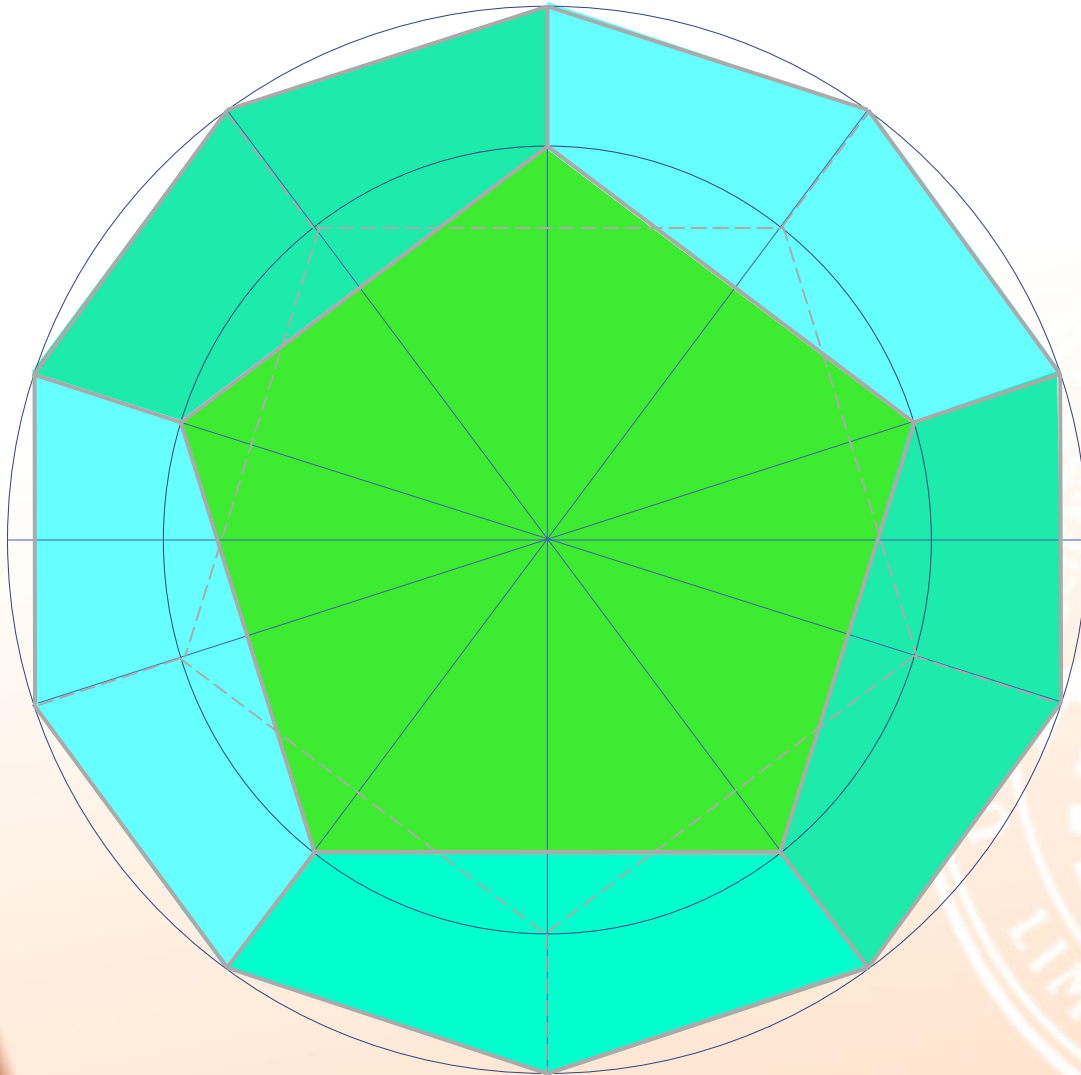
$C = 12$ caras

$V = 20$ vértices

$A = 30$ aristas

ce
pre
UNI

DIBUJANDO EL DODECAEDRO



PROBLEMA 7

¿Cuántas diagonales tiene el dodecaedro regular?

A) 100

D) 54

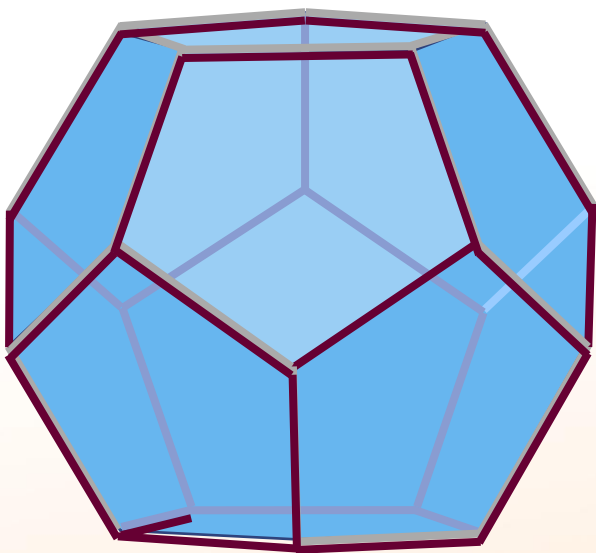
B) 66

E) 28

C) 36

RESOLUCIÓN 7

¿Cuántas diagonales tiene el dodecaedro regular?



$$\text{Nro. de diagonales}_{\text{poliedro}} = \frac{V(V-1)}{2} - A - \text{Nro. de diagonales}_{\text{caras}}$$

Para el dodecaedro regular: $C = 12, V = 20, A = 30$

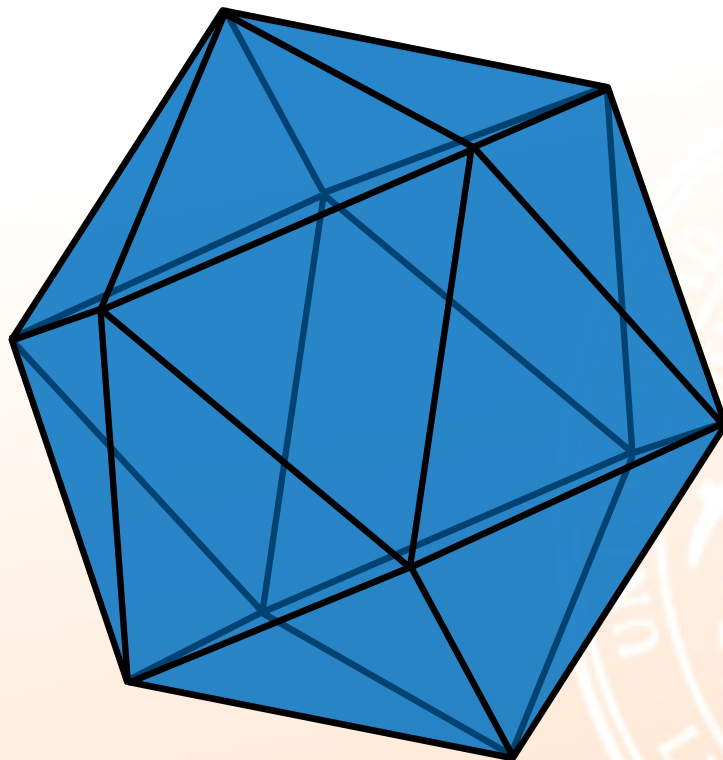
$$\text{Nro. de diagonales}_{\text{poliedro}} = \frac{20(20-1)}{2} - 30 - 12 \times 5$$

$$\text{Nro. de diagonales}_{\text{poliedro}} = 100$$

Clave: E

ICOSAEDRO REGULAR

Definición.- Es el poliedro convexo determinado por veinte regiones triangulares regulares.



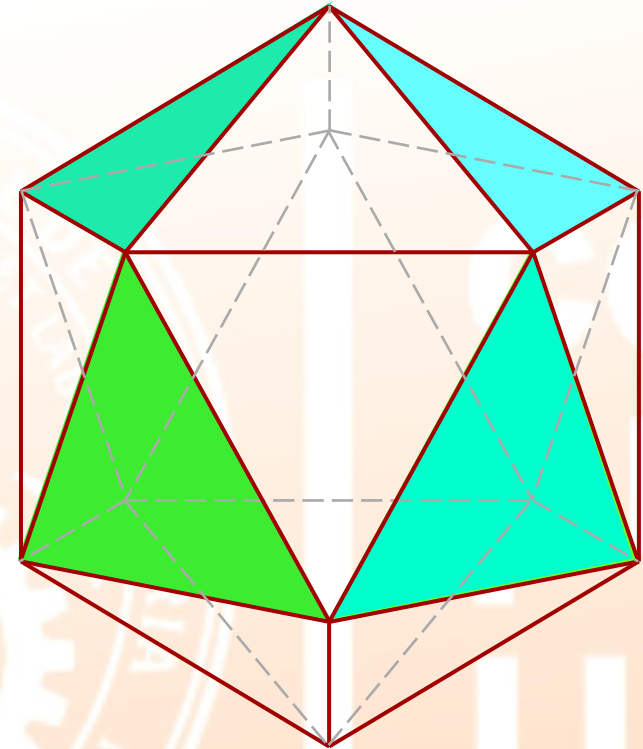
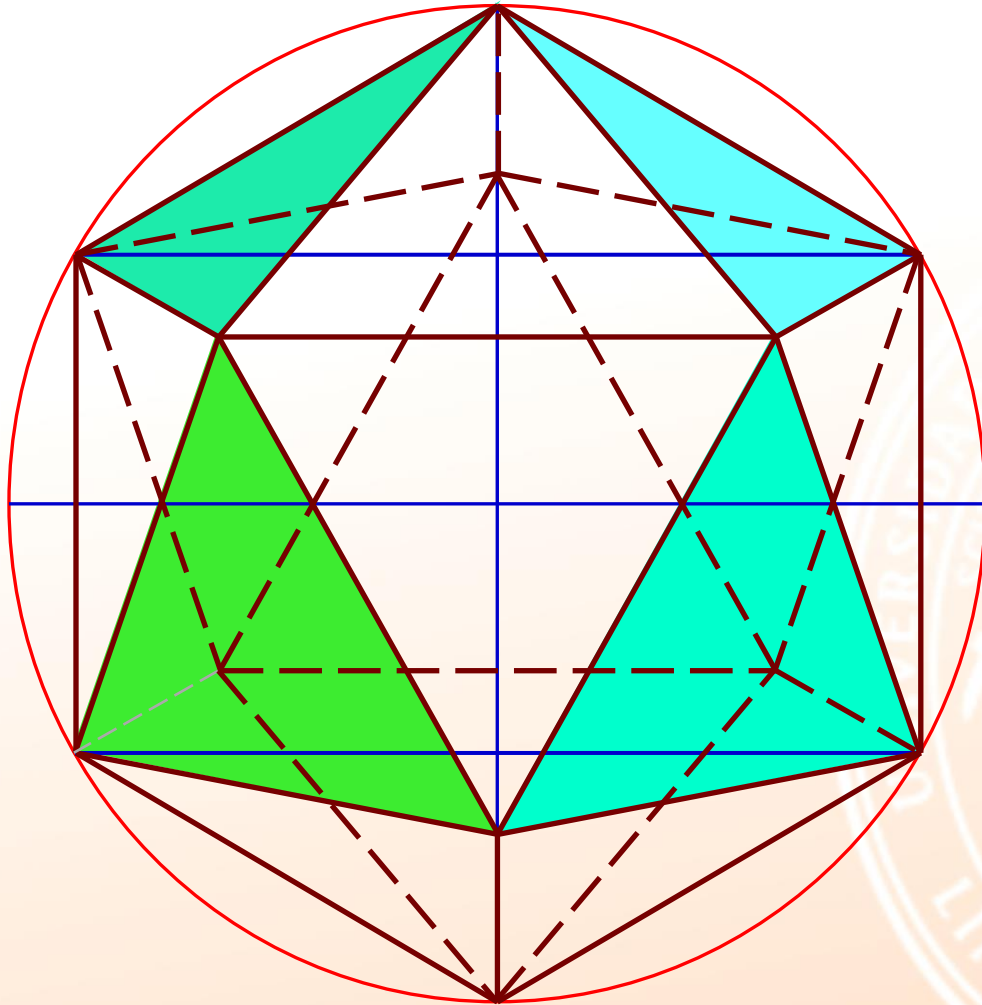
$C = 20$ caras

$V = 12$ vértices

$A = 30$ aristas

ce
pre
UNI

DIBUJANDO EL ICOSAEDRO



PROBLEMA 8

Si las regiones triangulares ABC, BCD, CDE, DEF,..., son las caras de un icosaedro regular, entonces la medida del ángulo determinado por las rectas CF y BE es

A) 18

D) 54

B) 36

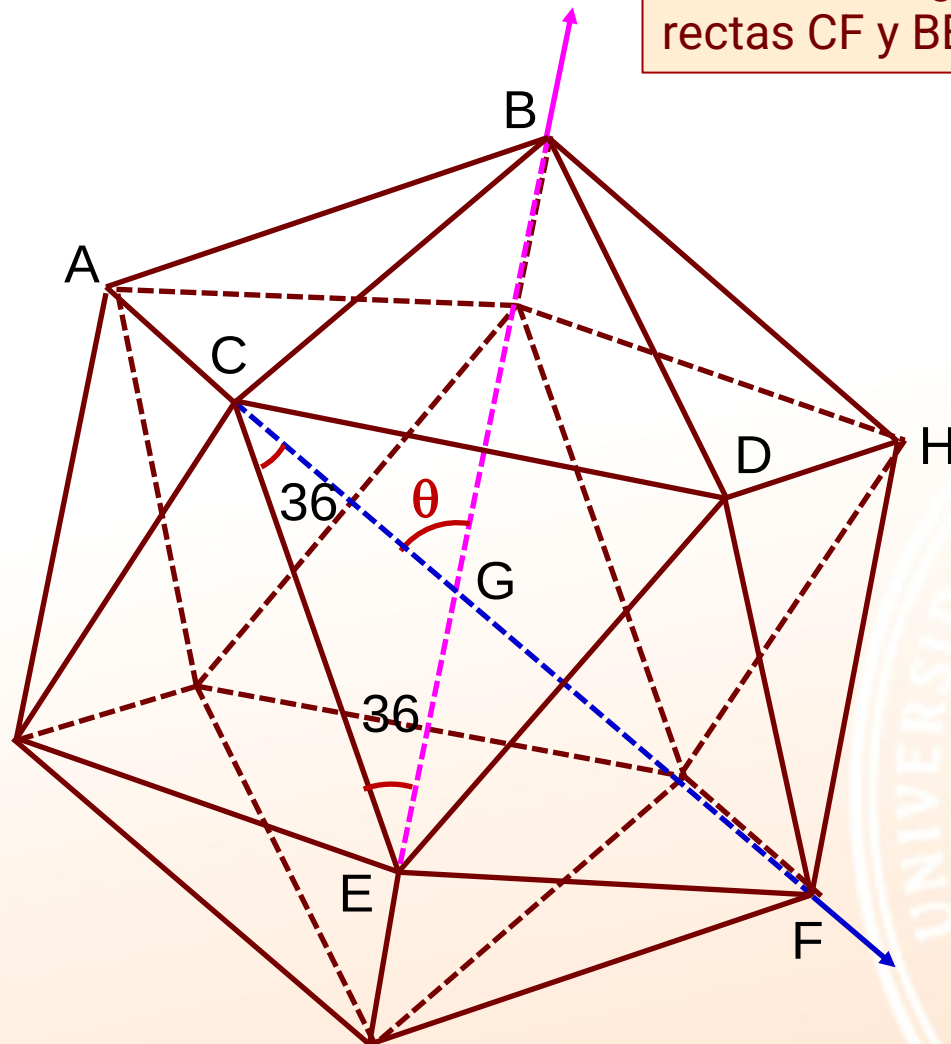
E) 64

C) 72

ce
pre
UNI

RESOLUCIÓN 8

Si las regiones triangulares ABC, BCD, CDE, DEF,..., son las caras de un icosaedro regular, entonces la medida del ángulo determinado por las rectas CF y BE es



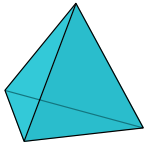
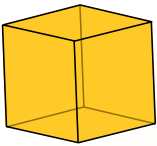
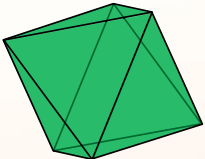
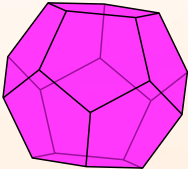
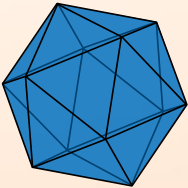
Sea θ la medida del ángulo

BHFEC es un pentágono regular

En el $\triangle CGE$ por teorema

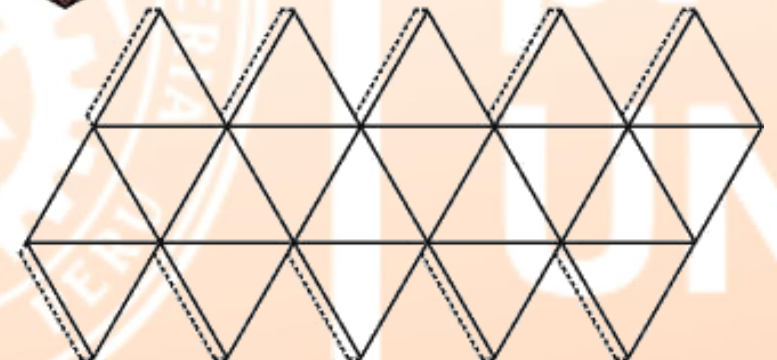
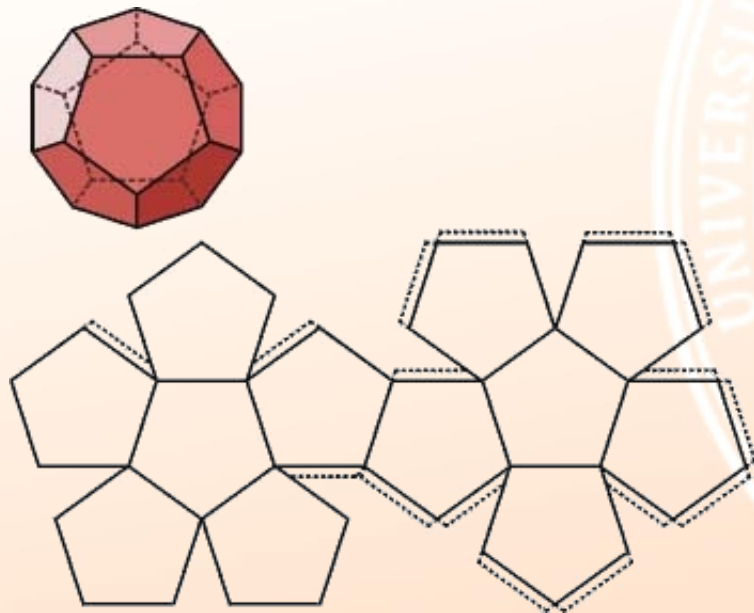
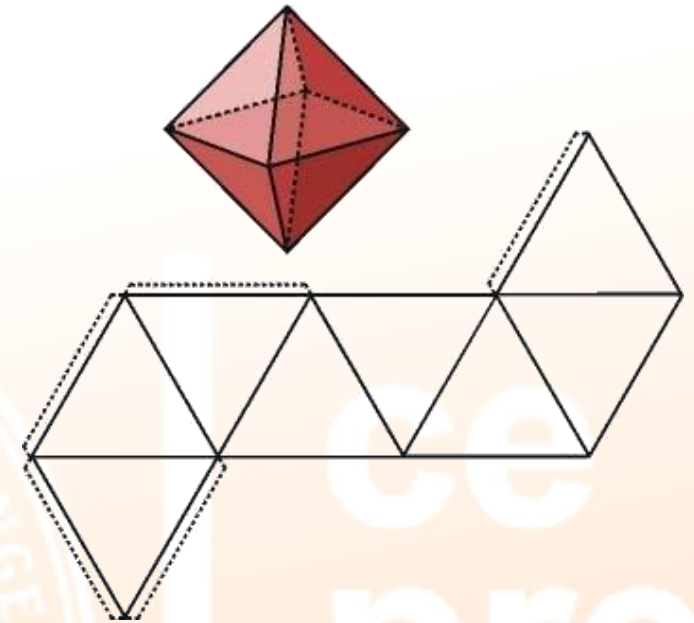
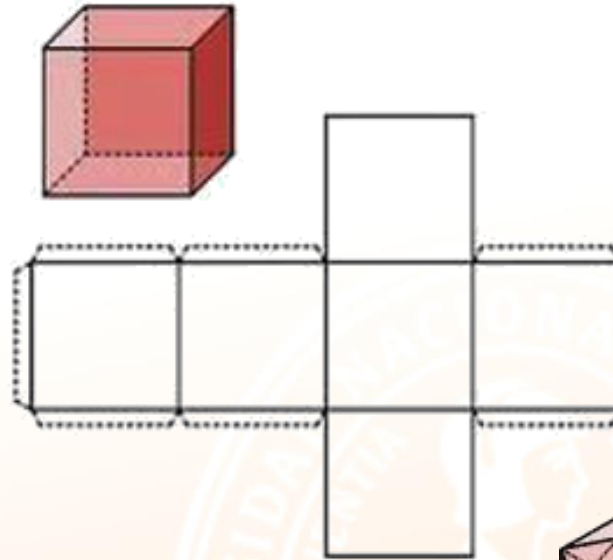
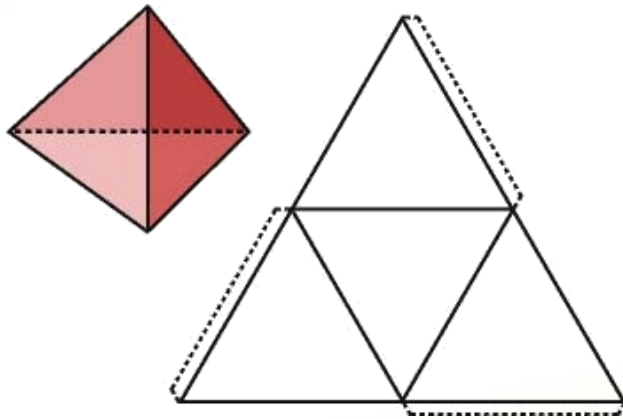
$$\theta = 72$$

Clave: C

POLIEDRO REGULAR		C	V	A	ÁREA TOTAL
TETRAEDRO		4	4	6	$a^2\sqrt{3}$
HEXAEDRO		6	8	12	$6a^2$
OCTAEDRO		8	6	12	$2a^2\sqrt{3}$
DODECAEDRO		12	20	30	$15a^2\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$
ICOSAEDRO		20	12	30	$5a^2\sqrt{3}$

a: longitud de una arista

DESARROLLO DE LOS POLIEDROS REGULARES





ce
pre
UNI

TEORÍA

Geometría

**POLIEDROS REGULARES
CONJUGADOS**

**CICLO
PRE
UNIVERSITARIO
2024-1**



POLIEDROS REGULARES CONJUGADOS

Definición

Se denominan poliedros regulares conjugados, aquellos poliedros regulares que, el número de caras de uno de ellos es igual al número de vértices del otro y viceversa.

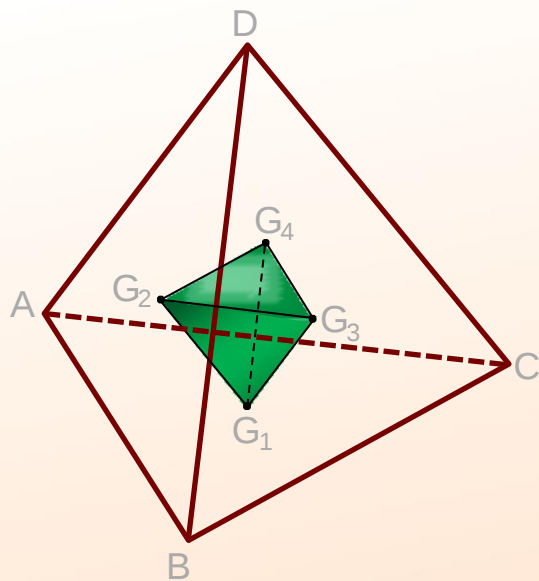
- El tetraedro regular es conjugado con otro tetraedro regular.
- El hexaedro regular y el octaedro regular son conjugados.
- El dodecaedro regular y el icosaedro regular son conjugados.

POLIEDROS REGULARES CONJUGADOS

DETERMINACIÓN DE UN POLIEDRO REGULAR CONJUGADO

Existen diversos métodos para determinar un poliedro conjugado de un poliedro regular, siendo uno de ellos el siguiente:

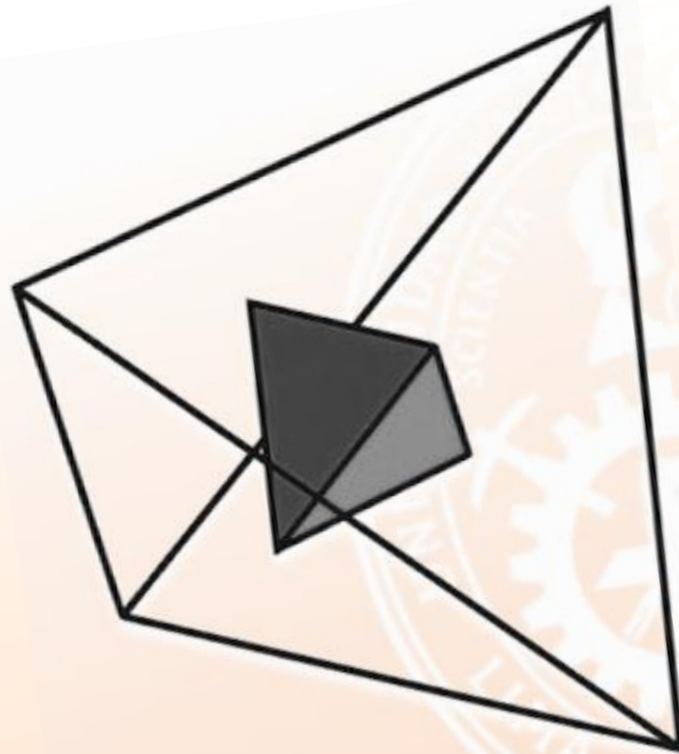
Se consideran como vértices del poliedro conjugado, los centros de las caras del poliedro regular dado.



Sean G_1 , G_2 , G_3 y G_4 centros de las caras del tetraedro regular, entonces el tetraedro $G_1G_2G_3G_4$ es el poliedro regular conjugado del tetraedro regular ABCD.

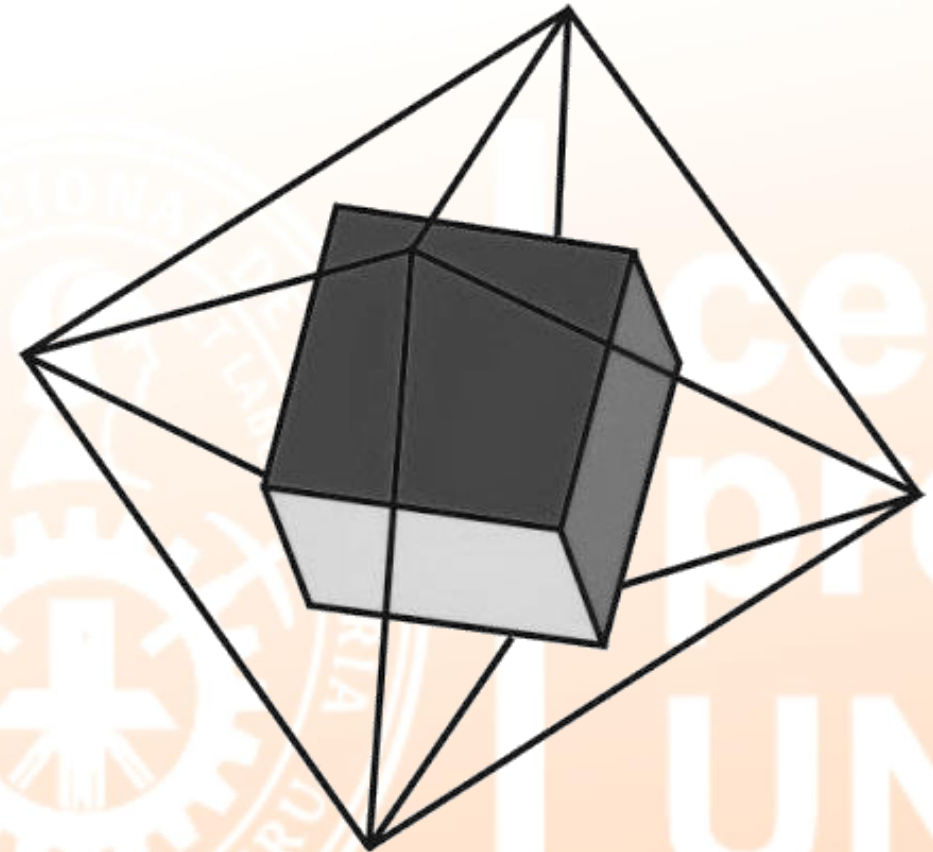
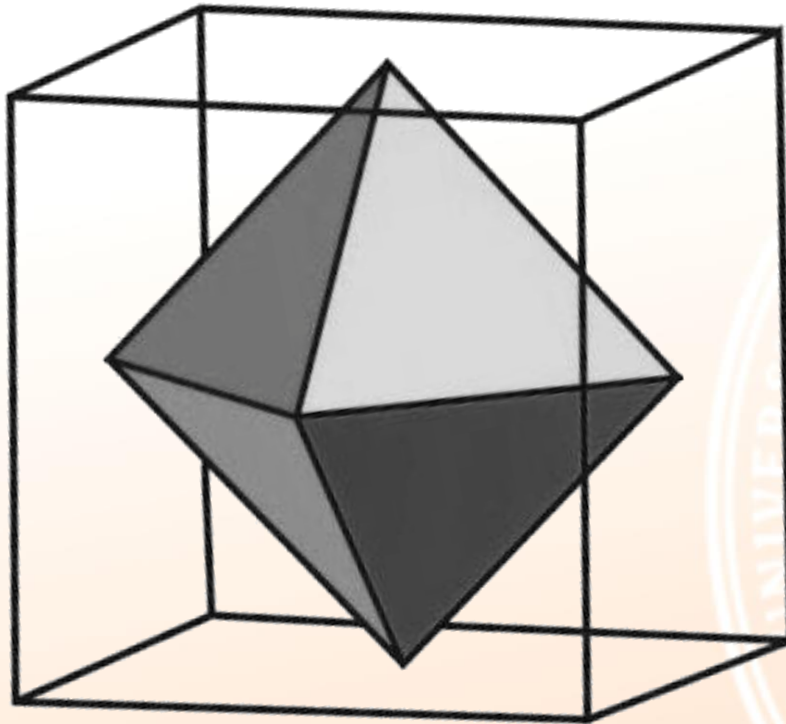
POLIEDROS REGULARES CONJUGADOS

El tetraedro regular es conjugado con otro tetraedro regular.



POLIEDROS REGULARES CONJUGADOS

El hexaedro regular y el octaedro regular son conjugados.



PROBLEMA 09

Si la longitud de la arista del octaedro regular es $\sqrt{2}$ cm, entonces la longitud (en cm) de la arista del poliedro regular conjugado cuyos vértices son los centros de las caras del octaedro es

A) $\frac{5}{4}$

B) $\frac{5}{3}$

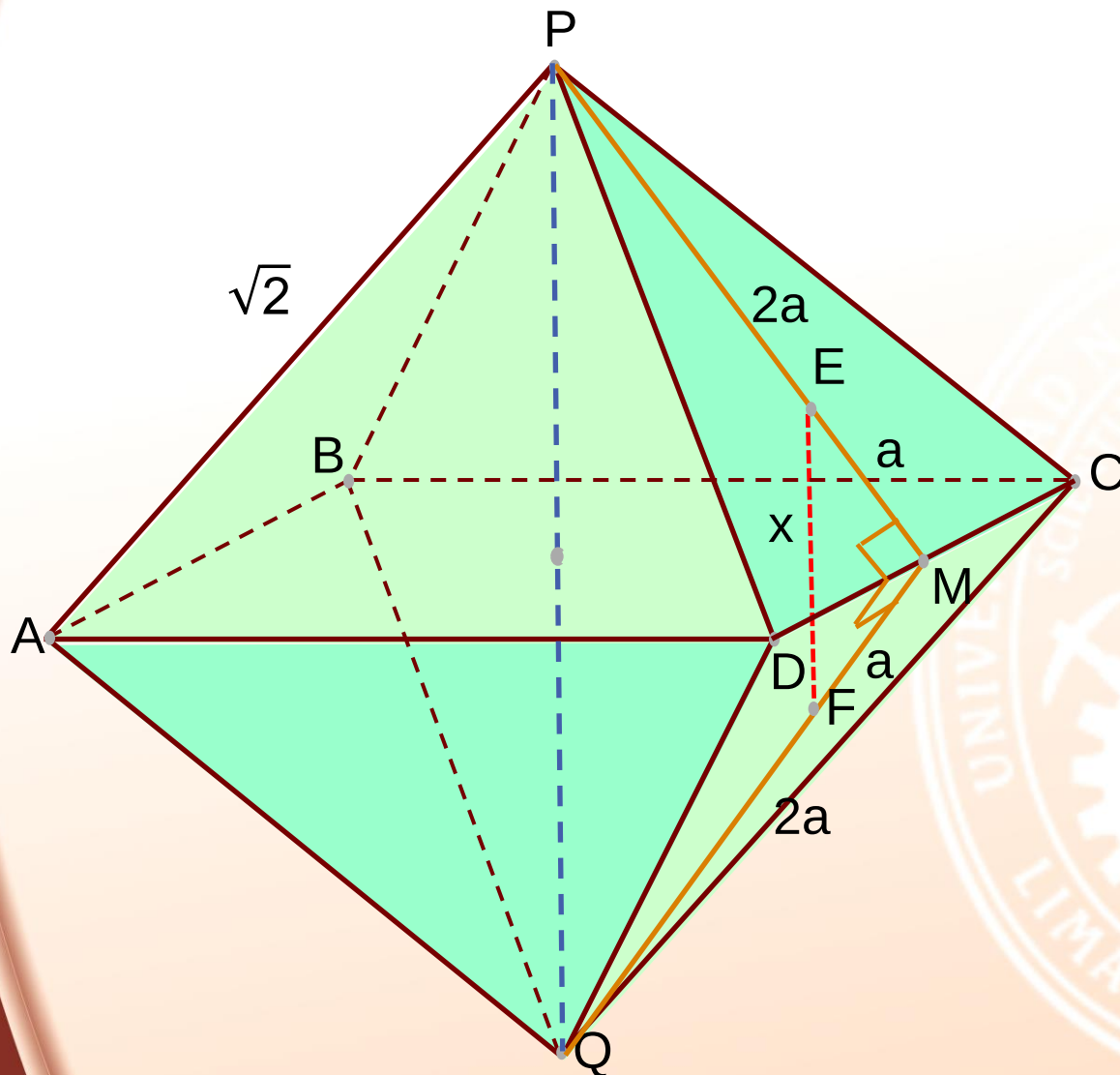
C) $\frac{3}{2}$

D) $\frac{2}{3}$

E) $\frac{4}{5}$

RESOLUCIÓN 09

Si la longitud de la arista del octaedro regular es $\sqrt{2}$ cm, entonces la longitud (en cm) de la arista del poliedro regular conjugado cuyos vértices son los centros de las caras del octaedro es



E y F centros de las caras PCD y QCD

$\overline{EF}$ es arista del hexaedro regular conjugado del octaedro regular

Calcule $EF = x$

$\triangle MEF \sim \triangle MPQ$

$$EF = \frac{PQ}{3}$$

Teorema, $PQ = 2 \Rightarrow EF = \frac{2}{3}$

Clave: D

POLIEDROS REGULARES CONJUGADOS

El dodecaedro regular y el icosaedro regular son conjugados.

